

簡諧運動

bee

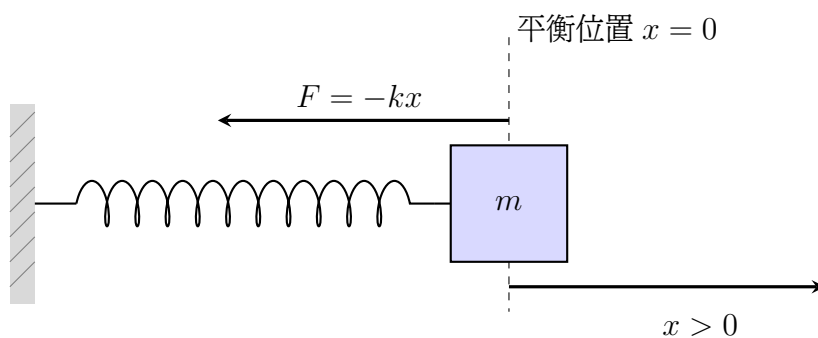
115 年 9 月 25 日

一個最簡易但豐富的物理運動。

1. 文前趣話

簡諧運動的英文是 Simple Harmonic Motion (SHM)，很有意思。不知道這名詞是怎樣寫出來的，不過，請讀者【自己】給個解釋，這是一件有趣的事情 (一個好習題)。

2. 簡諧運動



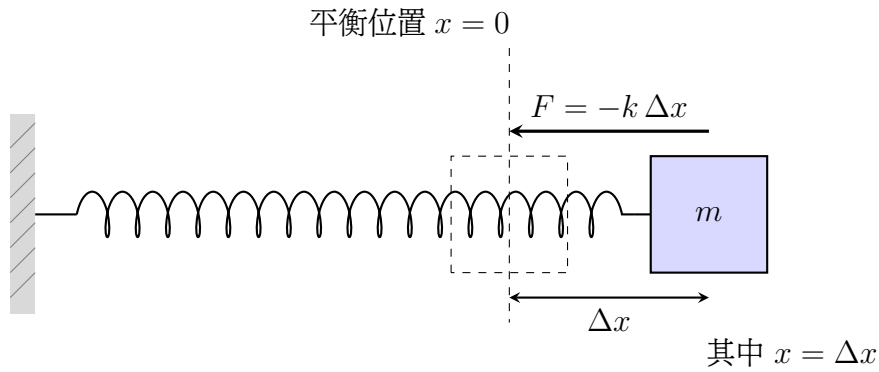
上圖是一個簡諧運動的示意圖。

當物體被向右拉伸長度 x 時，彈簧對物體會產生拉力 F ， F 和 x 的關係為

$$F = -kx$$

其中 k 是一個常數。

底下是拉動後的示意圖。



3. 數學分析

因為簡諧運動是一個 motion，所以我們得將 $F = -kx$ 變換成 x 與 t 之間的關係。

利用牛頓第二運動定律：

$$\begin{aligned} F = -kx &\implies ma = -kx \\ &\implies m \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \\ &\implies \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x(t) \\ &\implies \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -c^2 \cdot x(t) \end{aligned}$$

寫的簡單一點，就是一個微分方程式： $x'' = -c^2 \cdot x$ 。

在微分方程的課程裡，我們知道此方程式的唯一解型態為

$$x = a \cos ct + b \sin ct$$

這是一個很棒的結果。而且，也預告我們為何在高中數學課程中，要理解 $y = \cos x$ 和 $y = \sin x$ 的圖形，要學會兩函數的疊合： $x = a \cos ct + b \sin ct$ 的圖形。

習題：檢驗 $x = a \cos ct + b \sin ct$ 確實是微分方程式 $x'' = -c^2 \cdot x$ 的解。

4. 高中數學

在高二的數學課中，利用和角公式，我們有

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \theta)$$

換言之，描述簡諧運動的函數就是我們熟悉的三角函數。

其中 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 是函數的震幅， θ 是初始相位角。

如果我們把變數從位移 x 換成時間 t 時，可得

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

其中 x 是位移量、 A 是最大位移量或稱為振幅、 ω 是角速度、 t 是時間， ϕ 是初始相位，而 $\omega t + \phi$ 就是相位。

再寫一次：

- t ：時間 (Time) — 運動的原始變數。
- A ：振幅 (Amplitude) — 最大位移。
- ω ：角速度或者是角頻率。 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 稱為週期。
- $\omega t + \phi$ ：相位 (phase)，其中 ϕ 是初始相位，就是描述運動剛開始的位置。

5. 結語

這是一篇簡介的文章，主旨是補充高中數學中為何要學習三角函數與其疊合的必要性。

疊合函數的工具是和角公式。和角公式有很棒的幾何背景，這背景可以用向量簡易看出，不過，並不是很多人知道這幾何背景。

週期函數的基本概念是等速率圓周運動，幾何本質是單位圓函數。

簡諧運動怎會和三角函數扯上關係呢？這是虎克定律和微分方程式合作出來的結果，也是本文的內容。

6. 習題

有幾個內容本文沒有說明白，讀者應該自行補上。

- 怎樣學習和角公式。
- 怎樣用和角公式做函數的疊合。
- 微分方程式 $x'' = -c^2x$ 怎樣求解。
- 再次透視 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ 的物理意義。